30ª Conversazione

All'attenzione dei Colleghi

- Alla fine del IV secolo avanti Cristo, circa un secolo e mezzo dopo l'impresa atlantica di Imilcone, le acque settentrionali del grande oceano furono solcate dalla prora di colui che oggi è giustamente considerato il più grande tra tutti i navigatori dell'età antica: il greco Pitea di Marsiglia, colonia focese in Occidente, secolare concorrente di Cartagine[1]

Che tipo d'uomo era il nostro Pitea?

"Fuor d'ogni possibile dubbio un dotto, attento osservatore della natura e degli uomini, che non si fermava alla superficie delle cose, ma cercava di penetrarne la essenza e le cause. Persino il malevolo Strabone è costretto a riconoscere l'esattezza delle sue notizie in materia di climatologia e geografia astronomica. Calcolò con estrema precisione la latitudine della sua patria: i 14' di errore, che si attribuiscono alla sua misura, sembrano dipendere soltanto -------"

(Claudio Finzi: Ai confini del mondo)

- "La sua passione era spiegare, chiarire, farci comprendere, col risultato che ogni argomento di cui parlavamo veniva smontato nei suoi elementi principali con una meticolosità non inferiore a quella con cui divideva le frasi sulla lavagna (----)

---

(1) Fonti: Strabone, Geografia; Plinio, Storia naturale; Diodoro Siculo, Biblioteca; Gaston Broche, Pytheas le Massaliote.

Il suo singolare vezzo di scagliare un cancellino quando un allievo diceva qualcosa che gli sembrava eccezionalmente balordo e quasi certamente la stolta conseguenza della disattenzione, il più grave dei crimini."

(Da Philip Roth: Ho sposato un comunista. Questo libro, per Philip Roth, non è altro che un accorato ricordo del suo mentore Bob Lowenstein.)

- Le parole di papa Francesco: "Giovani, non abbiate paura dell'impegno, del sacrificio e non guardate con paura al futuro!"

  Impegno significa assunzione di responsabilità, adesione alla realtà, fermezza nel perseguire ciò che si ritiene giusto.

  Sacrificio - parola questa così scomoda oggi - significa rinuncia a ciò che non è essenziale e disponibilità a pagare un prezzo per quanto riteniamo abbia davvero valore nelle nostre vite.

- La vostra nave è carica. Partite. La velocità non ha alcuna importanza, seguite la vostra rotta, arrivate salvo a destinazione con la vostra nave e riportatela salva assieme ai passeggeri. La sicurezza è tutto ciò che io domando.

  (Lettera a un comandante di Samuel Cunard, fondatore della Cunard nel 1839)

- Trigonometria sferica con i triangoli piani

Devo ringraziare il tecnico Sig. Mario D'Andrea che, in una delle "Conversazioni in macchina", mi ha fatto ricordare un episodio della mia giovinezza, quando frequentavo l'Istituto Tecnico Nautico.

[Giovinezza è la stagione della speranza, ma oggi rischia anche di essere quella della disillusione]

La prof.ssa Serra, insegnante di matematica, mi assegnò il compito, ed allora era un gran privilegio, di portare i suoi registri nell'aula dove avrebbe tenuto successivamente la sua lezione.

La ragione di tale onore?

Il noto teorema di geometria elementare:

la misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi dalla corda.

Ed ora non resta che vedere l'allegato:

Come disse l'Ammiraglio Nelson a Trafalgar, faccia ciascuno il proprio dovere. Lui purtroppo ci rimise la pelle ma la battaglia fu vinta.

Speriamo di vincere anche noi la battaglia per la riscossa della scuola restando in piedi sul cassero della nostra nave-scuola che batte le insegne dell'Italia e dell'Europa.

- **Test Aspirante Ufficiali** : svolgimento

- **VI Gara Nazionale degli Istituti Nautici**
  Bari 2-3 Maggio 2013
  (Svolgimento dei Quesiti)

- **Richiesta da parte di un Collega** :
  Calcolo dell'errore dovuto alla scala costante delle latitudini crescenti nella costruzione approssimata della Carta di Mercatore.
  (Vedi la 29ª Conversazione del 20.05.2013)

Nota

Il "teorema della corda" consente anche di ottenere la distanza ortodromica fra due punti di una qualunque carta gnomonica, con un metodo del tutto generale :
Cari colleghi, vi prego, coinvolgete i nostri alunni nel risolvere questo interessante problema (la costruzione generale sulle carte gnomoniche).

- Un ricordo di mia madre :
  la generosità arricchisce

Con Affetto
Franco Esposito

Napoli 28.06.2013

Trigonometria sferica con i triangoli piani

1º Metodo

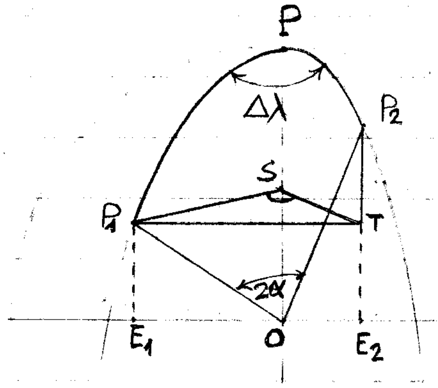


fig. 1

Dalla figura 1:

$P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ = punto di partenza

$P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ = punto di arrivo

$\overline{OP_1}$ o $\overline{OP_2}$ = raggio(r) della terra

$\overline{E_1P_1}$ o $\overline{E_2T}$: $y_1 = r \operatorname{sen} \varphi_1$

$\overline{E_2P_2}$: $y_2 = r \operatorname{sen} \varphi_2$; $\overline{P_1S}$: $x_1 = r \cos \varphi_1$; $\overline{ST}$: $x_2 = r \cos \varphi_2$

l'angolo nel polo e nel punto S è la differenza di longitudine tra P_1 e P_2 o $\Delta\lambda$.

Dal triangolo piano $P_1\hat{S}T$ si ha:

$$\overline{P_1T}^2 = \overline{P_1S}^2 + \overline{ST}^2 - \overline{P_1S} \cdot \overline{ST} \cos S = r^2 \cos^2 \varphi_1 + r^2 \cos^2 \varphi_2 - 2r^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda$$

Dal triangolo rettangolo $P_1\hat{T}P_2$: $\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1T}^2 + \overline{P_2T}^2$

$$\overline{P_1P_2}^2 = r^2(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 2\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda) + r^2(\operatorname{sen} \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_1)^2$$

Dal triangolo $P_1\hat{O}P_2$: $\overline{P_1P_2} = 2 \cdot r \cdot \operatorname{sen} \alpha$. Ancora:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\overline{P_1P_2}^2}{4r^2} = \frac{r^2}{4r^2}\left[(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 2\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda) + (\operatorname{sen} \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_1)^2\right]$$

$$sen^2\alpha = \frac{1}{4}\left[\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda + sen^2\varphi_2 + sen^2\varphi_1 - 2\,sen\varphi_2\,sen\varphi_1\right]$$

$$sen^2\alpha = \frac{1}{4}\left[2 - 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda - 2\,sen\varphi_2\,sen\varphi_1\right]$$

$$sen\,\alpha = sen\,45^\circ\sqrt{1 - \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda - sen\varphi_1\,sen\varphi_2} \qquad (1)$$

la distanza ortodromica (D_o) : $D_o = 2\alpha$ in gradi →
$D_o = 2\alpha \cdot 60$ in primi sulla terra sferica →
$D_o = 2\alpha \cdot 60 \cdot 1{,}001795274$ in miglia sul WGS-84 (*)
Per quanto riguarda i segni vale quanto già detto in altre occasioni, cioè: il segno di $\Delta\lambda$ è sempre positivo (+) ; per φ (Nord) segno (+) ; per φ (Sud) segno (−).
Se si continua a sviluppare l'equazione (1), si ottiene la nota formula :

$$\cos D_o = sen\varphi_1\,sen\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda$$ (Vedi Appendice - punto 1 -)

Se vogliamo conoscere la rotta iniziale (C_o), l'equazione (1) diventa:

$$(2) \qquad sen\left[(90^\circ - \varphi_2) : 2\right] = sen\,45^\circ\sqrt{1 - \cos\varphi_1\,sen D_o\cos C_o - sen\varphi_1\cos D_o}$$

Se si continua a sviluppare l'equazione (2), si ottiene la nota formula :

$$\cos C_o = \frac{sen\varphi_2 - sen\varphi_1\cos D_o}{sen D_o\cos\varphi_1}$$ (Vedi Appendice - punto 2 -)

Se usiamo questo metodo, le formule relative al triangolo di posizione sono :

$$sen\,\alpha = sen\,45^\circ\sqrt{1 - \cos\varphi\cos\delta\cos P - sen\varphi\,sen\delta}$$

(*) Vedi la 23ª Conversazione del 12.09.2012 l'altezza (h) dell'astro : $h = (90° - 2\alpha)$

$$\text{sen}^2\frac{(90°-h)}{2} = \text{sen}^2 45° \left(1 - \cos\varphi\cos\delta\cos P - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\delta\right)$$

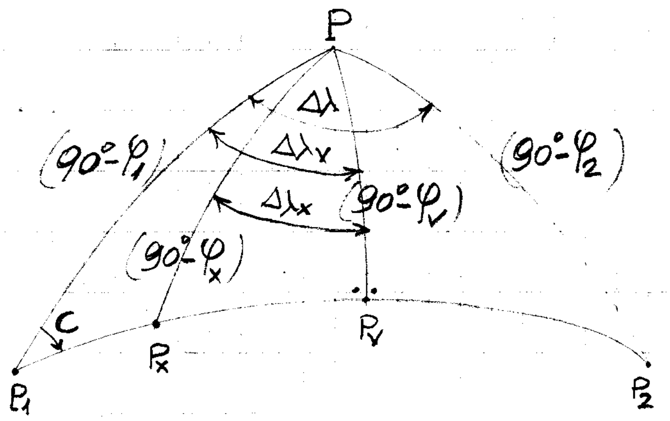
$$\frac{1-\cos(90°-h)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi\cos\delta\cos P - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\delta\right)$$

$$\text{sen}\,h = \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos P$$

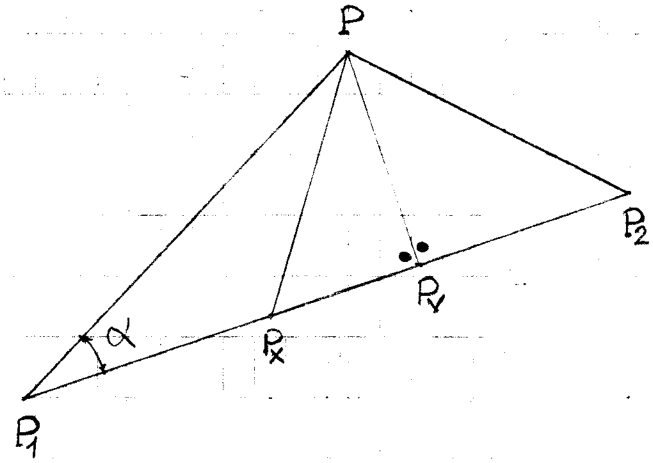
Usando lo stesso principio dell'equazione (2), otteniamo l'equazione dell'angolo azimutale :

$$\cos Z = \frac{\text{sen}\,\delta - \text{sen}\,h\,\text{sen}\,\varphi}{\cos h\,\cos\varphi}$$

2º Metodo



triangolo ortodromico sferico



triangolo ortodromico piano

Nel triangolo ortodromico piano :

- $\overline{P_1P_2}$ non è la distanza ortodromica
- α non è la rotta iniziale

$$P_1\hat{P}P_2 = \Delta\lambda \quad . \quad P_1\hat{P}P_V = \Delta\lambda_V \quad . \quad P_x\hat{P}P_V = \Delta\lambda_x$$

$$\overline{P_1P} \rightarrow r_1 = 1 : tag\,\varphi_1 \qquad \overline{P_xP} \rightarrow r_x = 1 : tag\,\varphi_x$$

$$\overline{P_VP} \rightarrow r_V = 1 : tg\,\varphi_V \qquad \overline{P_2P} \rightarrow r_2 = 1 : tag\,\varphi_2$$

Dal triangolo rettangolo $P_1\hat{P_V}P$:

$$r_V = r_1 \, sen\,\alpha \quad ; \quad sen\,\alpha = \frac{tg\,\varphi_1}{tg\,\varphi_V}$$

Dal triangolo piano P_1PP_2 :

$$\overline{P_1P_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Delta\lambda \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{r_1^2 + \overline{P_1P_2}^2 - r_2^2}{2r_1\cdot\overline{P_1P_2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Delta\lambda - r_2^2}{2r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Delta\lambda}} = \frac{2(r_1^2 - r_1r_2\cos\Delta\lambda)}{2r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\Delta\lambda}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{1}{tg^2\varphi_1} - \dfrac{1}{tg\varphi_1}\cdot\dfrac{1}{tg\varphi_2}\cos\Delta\lambda}{\dfrac{1}{tg\varphi_1}\sqrt{\dfrac{1}{tg^2\varphi_1} + \dfrac{1}{tg^2\varphi_2} - 2\,\dfrac{1}{tg\varphi_1}\cdot\dfrac{1}{tg\varphi_2}\cos\Delta\lambda}} = \frac{\dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1\cos\Delta\lambda}{tg^2\varphi_1 \; tg\varphi_2}}{\dfrac{1}{tg\varphi_1}\sqrt{\dfrac{tg^2\varphi_2 + tg^2\varphi_1 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}{tg^2\varphi_1 \; tg^2\varphi_2}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1\cos\Delta\lambda}{tg^2\varphi_1 \; tg\varphi_2} \cdot \frac{tg^2\varphi_1 \cdot tg\varphi_2}{\sqrt{tg^2\varphi_2 + tg^2\varphi_1 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}}$$

$$sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$sen^2\alpha = 1 - \frac{(tg\varphi_2 - tg\varphi_1\cos\Delta\lambda)^2}{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_1 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{tg^2\varphi_1 + \cancel{tg^2\varphi_2} - \cancel{2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda} - \cancel{tg^2\varphi_2} - tg^2\varphi_1\cos^2\Delta\lambda + \cancel{2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}}{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{tg^2\varphi_1(1-\cos^2\Delta\lambda)}{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda} = \frac{tg^2\varphi_1\operatorname{sen}^2\Delta\lambda}{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}$$

$$tag\,\varphi_V = \frac{tg\,\varphi_1}{\sqrt{\dfrac{tg^2\varphi_1\operatorname{sen}^2\Delta\lambda}{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}}} = \frac{tg\varphi_1\sqrt{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}}{tg\varphi_1\operatorname{sen}\Delta\lambda}$$

$$tg\,\varphi_V = \frac{\sqrt{tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2 - 2\,tg\varphi_1\,tg\varphi_2\cos\Delta\lambda}}{\operatorname{sen}\Delta\lambda} \qquad (*)$$

Dal triangolo piano rettangolo $P_1\hat{P}_VP$:

$$r_V = r_1\cos\Delta\lambda_V\ ;\quad \cos\Delta\lambda_V = \frac{r_V}{r_1}\ ;\quad \cos\Delta\lambda_V = \frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_V}\ ;\quad \lambda_V = \lambda_1 + \Delta\lambda_V$$

Dal triangolo piano rettangolo $P_x\hat{P}_VP$:

$$r_V = r_x\cos\Delta\lambda_x\ ;\quad r_x = \frac{r_V}{\cos\Delta\lambda_x}\ ;\quad \frac{1}{tg\varphi_x} = \frac{\dfrac{1}{tg\varphi_V}}{\cos\Delta\lambda_x}$$

$$tg\,\varphi_x = \cos\Delta\lambda_x\; tg\,\varphi_V$$

(*) Vedi la 29ª Conversazione del 20.05.2013

Applicazione

Una nave deve navigare per ortodromia da Brisbane ($\varphi_1 = 27° 15',0$ S ; $\lambda = 152° 58'$E) ad un punto situato nei pressi del Canale di Panama ($\varphi_2 = 07° 30'$N ; $\lambda_2 = 80° 00'$ W)

Determinare :

1) Il cammino ortodromico, anche sul WGS-84, e la rotta iniziale
2) le coordinate del vertice
3) Longitudine del nodo e distanza di tale punto dal punto di partenza
4) latitudine del punto d'incontro dell'ortodromia con l'antimeridiano di Greenwich

①

$$\begin{array}{l} \lambda_2 = -80° 00',0 \\ -\lambda_1 = -152° 58',0 \\ \hline \Delta\lambda = -232° 58',0 \text{ W} \\ \Delta\lambda = 127° 02',0 \text{ E} \end{array}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,45° \sqrt{1 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda - \text{sen}\,\varphi_1\,\text{sen}\,\varphi_2}$$

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}891801728$; $2\alpha = 126{,}2010634°$;

$D_0 = 7572{,}06$ mg ; su WGS-84 : $D_0' = 7585{,}66$ mg.

$$\cos C_0 = \frac{\text{sen}^2 45° - \text{sen}^2 45°\,\text{sen}\,\varphi_1 \cos D_0 - \text{sen}^2\left[(90° - \varphi_2) : 2\right]}{\text{sen}^2 45° \cos\varphi_1\,\text{sen}\,D_0}$$

$$\cos C_0 = \frac{-0{,}069951797}{0{,}358695902} = -0{,}195016996 \;; \quad C_0 = N\,101° 14' 45'' E$$

②

$$\text{tag}\,\varphi_V = \frac{\sqrt{\text{tg}^2\varphi_1 + \text{tg}^2\varphi_2 - 2\,\text{tg}\,\varphi_1\,\text{tg}\,\varphi_2 \cos\Delta\lambda}}{\text{sen}\,\Delta\lambda} = 0{,}56149941$$

$$\varphi_V = 29° 18' 51'' S$$

$$\cos\Delta\lambda_V = \frac{tg\,\varphi_1}{tg\,\varphi_V} = 0{,}917248027 \;;$$

$$\begin{array}{rl} \Delta\lambda_V = & +23^\circ\,28'\,23'' \\ +\lambda_1 = & +152^\circ\,58'\,00'' \\ \hline \lambda_V = & +176^\circ\,26'\,23''\,E \end{array}$$

③

$$\begin{array}{rl} \lambda_V = & +176^\circ\,26'\,23'' \\ +\Delta\lambda_{(N-V)} = & +\;\;90^\circ \\ \hline \lambda_N = & +266^\circ\,26'\,23''\,E \\ \lambda_N = & \;\;93^\circ\,33'\,37''\,W \end{array}$$

$$cotg\,d_N = -\cos C_0 \cot\varphi_1 = -0{,}37865278$$

$$d_N = 6644{,}36 \text{ mg.}$$

④

$$\begin{array}{rl} \lambda_{AG} = & +180^\circ \\ -\lambda_V = & -\,176^\circ\,26'\,23'' \\ \hline \Delta\lambda_X = & +\;\;03^\circ\,33'\,37''\,E \end{array}$$

$$tg\,\varphi_X = \cos\Delta\lambda_X \, tg\,\varphi_V = -0{,}56041531$$

$$\varphi_X = 29^\circ\,16'\,00''\,S$$

Appendice

Punto 1

$$sen^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda - sen\,\varphi_1\,sen\,\varphi_2\right)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\,sen^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda - sen\,\varphi_1\,sen\,\varphi_2\right)$$

$$\cos 2\alpha = \cancel{1} - \cancel{1} + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda + sen\,\varphi_1\,sen\,\varphi_2$$

$$\cos D_0 = sen\,\varphi_1\,sen\,\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda$$

Punto 2

$$sen^2\left[\frac{90^\circ-\varphi_2}{2}\right] = sen^2 45^\circ\left(1-\cos\varphi_1 \, sen\, D_o \cos C_o - sen\,\varphi_1 \cos D_o\right)$$

$$sen\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\frac{1-\cos(90^\circ-\varphi_2)}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\varphi_1 \, sen\, D_o \cos C_o - sen\,\varphi_1 \cos D_o\right)$$

$$1 - sen\,\varphi_2 = 1-\cos\varphi_1 \, sen\, D_o \cos C_o - sen\,\varphi_1 \cos D_o$$

$$\cos\varphi_1 \, sen\, D_o \cos C_o = sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_1 \cos D_o$$

$$\cos C_o = \frac{sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_1 \cos D_o}{\cos\varphi_1 \, sen\, D_o}$$

Test Aspirarnte Ufficiali -

Traccia (*)

Il **giorno** 11.04.2013 alle ore 08.00, **dal punto** GPS **A)** φ **= 41°06,5' N;** λ **= 017°08,4' E si intraprende una navigazione con Pb 270°** e **Vp 12 nodi.**

Alle **08.20** si rileva **Torre Pelosa per** ρ **= 045° a sinistra** e alle **08.26** la si rileva al **traverso di sinistra.**

Determinare:

$P_b = 270°$
$+\delta = +\ 2°\ 15'$
$P_m = 272°\ 15'$
$+d = +\ 3°\ 45'$
$P_v = 276°\ 00'$

1) gli elementi della corrente:

$m = 5{,}2$ mg.

a_c = 236°
v_c = 2,7 nodi

$P_v = 276°$
$+\rho = -\ 90°$
$Ril_v = 186°$
$d = 1{,}2$ mg

2) gli elementi del moto effettivo:

R_v = 269°
v_e = 14 nodi

Dal punto nave determinato si prosegue la navigazione verso il punto B) φ **= 41°11,7' N;** λ **= 016°44,5' E.**
Determinare la Pb e l'ETA di arrivo.

$\Delta t = \frac{12{,}85}{13{,}1} = 0^h 58^m 51^s$

$8^h 26^m + 59^m = 9^h 25^m$

$P_v = 306°\ 00'$
$-d = -\ 3°\ 45'$
$P_m = 302°\ 15'$
$-\delta = -\ 3°\ 15'$
$P_b = 299°\ 00'$

Pb = 299°

ETA = $09^h 25^m$

Giunti in B si riceve una richiesta di assistenza da parte di una imbarcazione alla deriva (elementi della corrente inalterati) in posizione
C) φ **= 41°14,0' N;** λ **= 017°03,4' E.**
Determinare la rotta d'intercettazione e la presunta ora di arrivo.

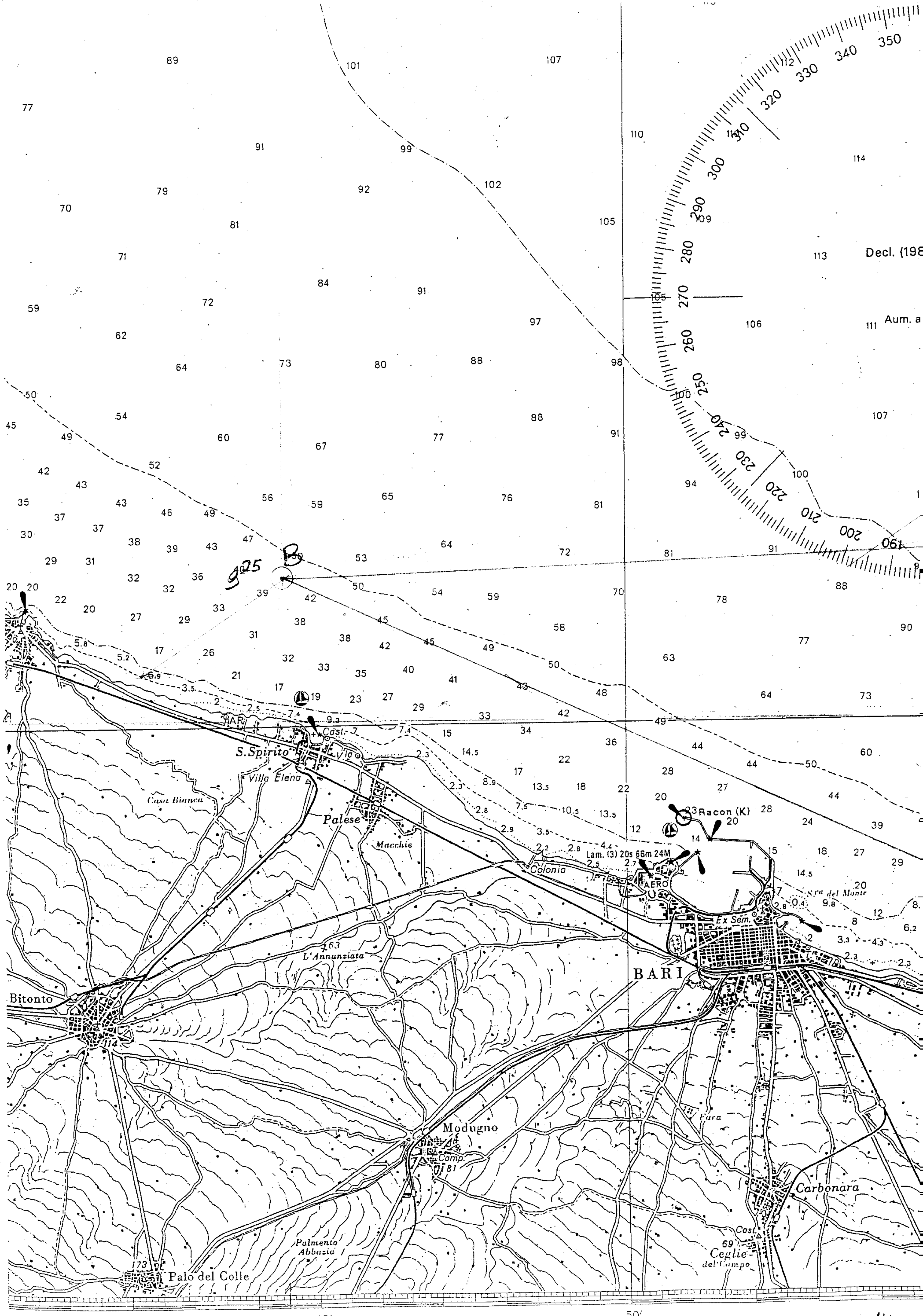
$\Delta t = \frac{3{,}3}{2{,}7} = 1^h 13^m 20^s$

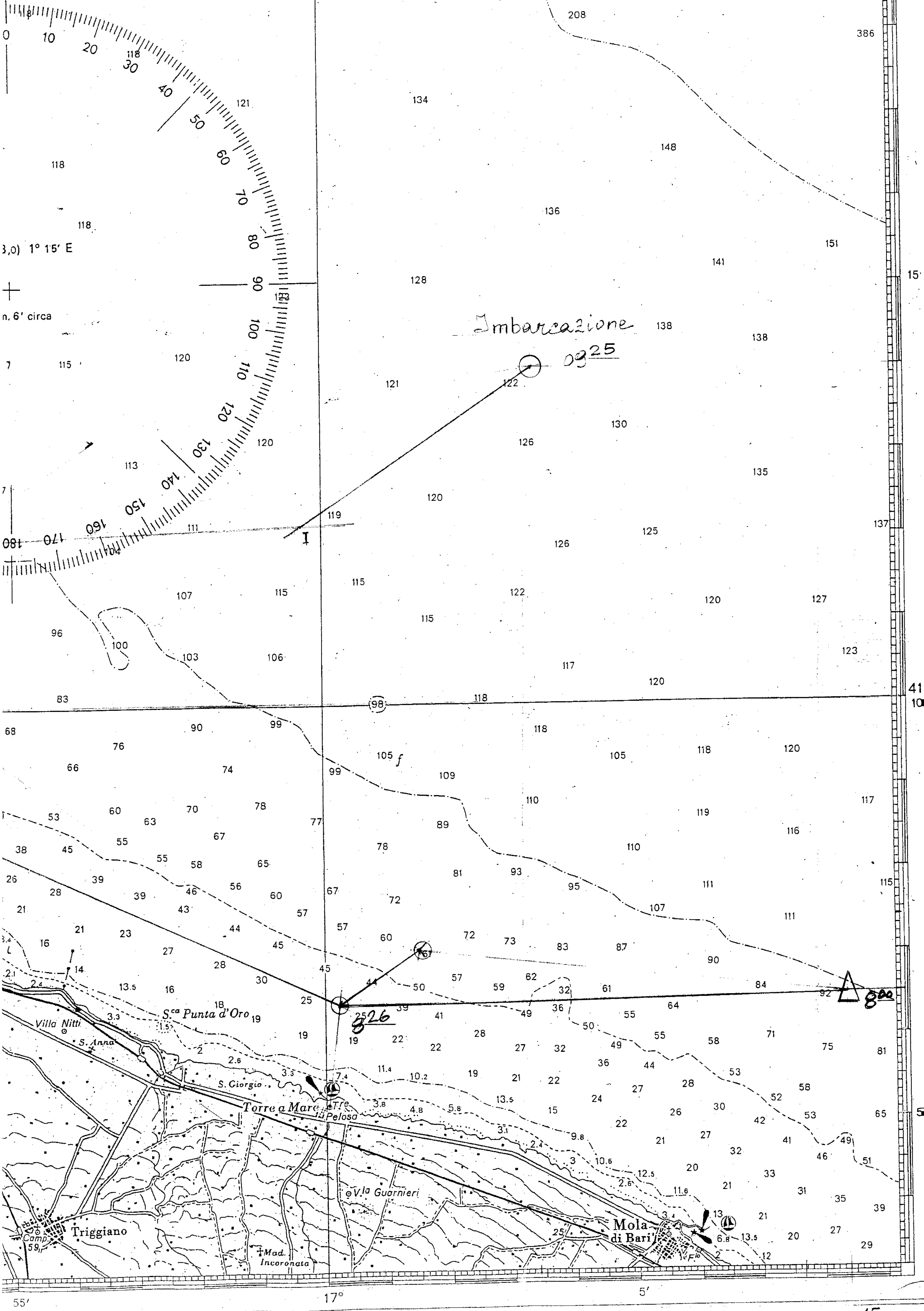
$9^h 25^m + 1^h 13^m 20^s = 10^h 38^m 20^s$

Rv = 87,5°

ETA = $10^h 38^m$

(*) Vedi Esposito Franco = svolgimento dei quesiti Esame di Stato anno 2007, in particolare il quesito B


Decl. (198
Aum. a
Racon (K)
Lam. (3) 20s 66m 24M
AERO
Ex Sem.
S.ta del Monte
Colonia
S.Spirito
Villa Elena
Cast.
Palese
Macchie
Casa Bianca
L'Annunziata
Bitonto
BARI
Fura
Modugno
Camp.
Carbonara
Palmento Abbazia
Cast.
Ceglie del Campo
Palo del Colle
0'
45'
50'



1° 15′ E
n. 6′ circa
Imbarcazione
09 25
I
8 26
8 00
S.ca Punta d'Oro
Villa Nitti
S. Anna
S. Giorgio
Torre a Mare
V.la Guarnieri
Mad. Incoronata
Triggiano
Camp.
Mola di Bari
55′
17°
5′

VI GARA NAZIONALE DEGLI ISTITUTI NAUTICI
BARI 2-3 MAGGIO 2013

PROVA TEORICA DI NAVIGAZIONE E TEORIA E TECNICA DEI TRASPORTI

Quesito A

Alle t_m=08^{h}30^m del 21/04/2013 una nave parte da San Diego (Cal. USA()φ= 32°39'.0 N; λ= 117°14'.0 W) diretta per c.m., alla velocità 18 Kn, verso Tokyo (φ= 34°51'.0 N; λ= 139°46'.0 E). Calcolare:

1. gli elementi dell'ortodromia, l'ETA in UT, in tempo locale medio e tempo fuso.
2. l'istante, da riportare sul giornale di bordo, del passaggio della "Date Line" corrispondente al λ= 180°;
3. le coordinate del primo punto di una serie di 9 WP posti sull'arco ortodromico, la rotta, il cammino lossodromico e l'istante di arrivo in tale punto.

Quesito B

Alle t_m=19^{h}30^m del 20/04/2013 da una nave in P_N (φ= 38°54'.0 N; λ= 124°40'.0 W) si osserva la Luna, $h_{i\ lem.sup.}$= 56°01,5'. Determinare le coordinate altazimutali nell'istante di osservazione e il _h (e = 18 m.; c_i = 0,0'; γ_c= -1,5').

Quesito C

1. Una nave deve caricare in un porto fluviale ove la densità è uguale a 1,004 t/m^3. Il bordo libero attuale è 1830 mm a sinistra e 1980 mm a dritta. Il suo bordo libero statutario (BL estivo in acqua salata con densità di 1,025 t/ m^3) è 1850 mm. La FWA = 155 mm; il TPC = 19,05 t. Durante il viaggio in fiume si prevede di consumare 30 t di fuel oil e 5 t di provviste ed acqua. Quanto carico si può imbarcare per raggiungere il galleggiamento di bordo libero regolamentare in acqua salata?
2. Determinare il bunker necessario per effettuare una traversata della durata di 5 giorni e 18 ore, sapendo che il consumo giornaliero di combustibile ammonta a 30 t. e che la rimanenza ammonta a 47 t.
3. Una nave ha un _$_0$ = 6000 t. e un KG = 6,10. Calcolare il KG_1 in seguito all'imbarco e sbarco dei seguenti pesi:

imbarcati		sbarcati	
1000 t	Kg_1 = 2,5 m.	-450 t.	Kg_4 = 0,6 m.
500 t	Kg_2 = 3,5 m.	-800 t.	Kg_5 = 3,0 m.
750 t	Kg_3 = 3,5 m.		

Durata massima della prova 5 ore.
E' consentito soltanto l'uso di tavole numeriche, manuali tecnici, del regolo calcolatore e di calcolatrici non programmabili.

PROVA PRATICA DI NAVIGAZIONE

Quesito A

In navigazione a SE dell'isola di Pianosa, l'imbarcazione A diretta al porticciolo turistico di Marciana Marina con v_p = 6 nodi, al $t_f = 10^h00^m$, nel punto (φ□42°31',8 N λ□010°12',2 E), accosta per passare a 2 miglia a levante dell'isolotto la Scola. Nella zona agisce una corrente di a_c = 40° e v_c = 1,2 nodi. Calcolare i valori della P_b da dare al timoniere e della V_{eff}.
Alle $t_f = 10^h36^m$ il segnale dell'isolotto la Scola è rilevato, al grafometro, per ρ= - 45° ed alle $t_f = 10^h52^m$ risulta al traverso sulla sinistra. Calcolare le coordinate del P_N.
Al $t_f = 11^h04^m$ si rilevano, in rapida successione (trasformati opportunamente), il faro di Pianosa per Ril_m = 201° e l'isolotto la Scarpa per Ril_m = 269°. Determinare le coordinate del P_N.
Alle $t_f = 11^h04^m$ l'imbarcazione B comunica di trovarsi nel punto (φ□42°34',7 N λ= 010°20'E) alla deriva (a_c = 40°, v_c = 1,2 nodi), chiede immediata assistenza che potrebbe tramutarsi in soccorso. Determinare:
1) il valore della rotta d'intercettazione e la P_b da seguire;
2) le coordinate del punto d'intercettazione;
3) l'ETA del punto d'intercettazione, da comunicare all'imbarcazione;
4) la temperatura di rugiada e l'umidità relativa essendo la temperatura del Ta=20° e quella del Tb=19°.

Durata massima della prova 3 ore.
E' consentito soltanto l'uso di tavole numeriche, manuali tecnici, del regolo calcolatore e di calcolatrici non programmabili.

TABELLA DI DEVIAZIONE BUSSOLA MAGNETICA

Prora bussola	δ	*Prora bussola*	δ
000°	*- 5°.0*	*195°*	*+ 7°.1*
015°	*- 6°.4*	*210°*	*+ 6°.7*
030°	*- 7°.0*	*225°*	*+ 5°.2*
045°	*- 6°.9*	*240°*	*+ 3°.8*
060°	*- 6°.2*	*255°*	*+ 3°.1*
075°	*- 5°.4*	*270°*	*+ 2°.7*
090°	*- 3°.9*	*285°*	*+ 2°.7*
105°	*- 1°.9*	*300°*	*+ 2°.7*
120°	*+ 0°.1*	*315°*	*+ 1°.6*
135°	*+ 2°.2*	*330°*	*- 0°.5*
150°	*+ 4°.8*	*345°*	*- 3°.0*
165°	*+ 6°.5*	*360°*	*- 5°.0*
180°	*+ 7°.3*		

Prora magnetica	δ	*Prora magnetica*	δ
000°	*- 5°.6*	*195°*	*+ 7°.3*
015°	*- 6°.8*	*210°*	*+ 7°.0*
030°	*- 7°.0*	*225°*	*+ 5°.8*
045°	*- 6°.6*	*240°*	*+ 4°.0*
060°	*- 6°.0*	*255°*	*+ 3°.3*
075°	*- 4°.8*	*270°*	*+ 2°.8*
090°	*- 3°.4*	*285°*	*+ 2°.7*
105°	*- 1°.7*	*300°*	*+ 2°.8*
120°	*0°.0*	*315°*	*+ 1°.8*
135°	*+ 2°.0*	*330°*	*- 0°.6*
150°	*+ 4°.0*	*345°*	*- 3°.4*
165°	*+ 6°.0*	*360°*	*- 5°.6*
180°	*+ 7°.1*		

PROVA TEORICA DI NAVIGAZIONE E TEORIA E TECNICA DEI TRASPORTI

Quesito A

1

$$\lambda' = +\ 139°\ 46',0$$
$$-\lambda = +\ 117°\ 14',0$$
$$\Delta\lambda = +\ 257°\ 00',0\ E$$
$$\Delta\lambda = 103°\ 00',0\ W$$

$$\cos d = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos\Delta\lambda = 0{,}152854598$$
$$d = 4872{,}5 \text{ mg.}$$

$$\cos R_i = \frac{\operatorname{sen}\varphi' - \operatorname{sen}\varphi \cos d}{\cos\varphi \operatorname{sen} d} = 0{,}587635304$$
$$R_i = N\ 54°\ 00'38''\ W$$

$$\operatorname{tg}\Delta\lambda_{(A-V)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi' \cot\varphi}{\operatorname{sen}\Delta\lambda} - \cot\Delta\lambda = 1{,}346156905$$

$$\Delta\lambda_{(A-V)} = -\ 53°23'35''$$
$$+\ \lambda = -\ 117°14'00''$$
$$\lambda_V = -\ 170°37'35''\ W$$

$$\cot\varphi_V = \cos\Delta\lambda_{(A-V)} \cot\varphi = 0{,}930652688 \qquad \varphi_V = 47°03'26''\ N$$

$$\Delta t = \frac{4872{,}5}{18} = 270^h\ 41^m\ 40^s = 11^d\ 06^h\ 41^m\ 40^s$$

$$t_m = 08^h\ 30^m\ 00^s \quad \text{del } 21/04/2013$$
$$-\lambda = +07^h\ 48^m\ 56^s$$
$$T_m = 16^h\ 18^m\ 56^s \quad \text{del } 21/04$$
$$+\ \Delta t = 06^h\ 41^m\ 40^s \quad 11^d$$
$$(UT)\ T'_m = 23^h\ 00^m\ 36^s \quad \text{del } 02/05$$
$$+\ \lambda = +09^h\ 19^m\ 04^s$$
$$t_m = 08^h\ 19^m\ 40^s \quad \text{del } 03/05$$
$$+\ C_f = -\ 19^m\ 04^s$$
$$t_f = 8^h\ 00^m\ 36^s \quad \text{del } 03/05$$

2

$$\lambda' = -180^\circ\ 00',0$$
$$-\lambda = +117^\circ\ 14',0$$
$$\Delta\lambda_G = -\ 62^\circ\ 46',0\ W$$

$$\cot d_G = \frac{\operatorname{sen}\varphi \cos R_i + \operatorname{sen} R_i \cot \Delta\lambda_G}{\cos\varphi} =$$
$$= 0,871114031 \qquad d_G = 2936,4 \text{ mg.}$$

$$\Delta t = \frac{2936,4}{18} = 163^h\ 08^m\ 00^s = 06^d\ 19^h\ 08^m\ 00^s$$

$$T_m = 16^h\ 18^m\ 56^s \quad \text{del } 21/04$$
$$+\Delta t = 19^h\ 08^m\ 00^s \quad 6^d$$
$$T_m' = 11^h\ 26^m\ 56^s \quad \text{del } 28/04$$
$$+\lambda_f = +12^h$$
$$t_f = 23^h\ 26^m\ 56^s \quad \text{del } 28/04 \text{ (riportare sul giornale)}$$

3

$$\Delta\lambda_p = \frac{103^\circ}{10} = 10,3^\circ = 10^\circ\ 18'\ W$$

$$\lambda = -117^\circ\ 14',0$$
$$+\Delta\lambda_p = -\ 10^\circ\ 18',0$$
$$\lambda_1 = -127^\circ\ 32',0\ W$$

$$\lambda_V = -170^\circ\ 37'\ 35''$$
$$-\lambda_1 = +127^\circ\ 32'\ 00''$$
$$\Delta\lambda_1 = -\ 43^\circ\ 05'\ 35''\ W$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \cos\Delta\lambda_1 \operatorname{tg}\varphi_V = 0,784661656$$

$$\varphi_1 = 38^\circ\ 07'\ 12''\ N$$

$$\varphi' = +38^\circ\ 07'\ 12''$$
$$-\varphi = -32^\circ\ 39'\ 00''$$
$$\Delta\varphi = +05^\circ\ 28'\ 12''\ N$$
$$(328',2)$$

$$\varphi_c' = +2477,41$$
$$-\varphi_c = -2074,54$$
$$\Delta\varphi_c = +402,87$$

$$\Delta\lambda_p = 10,3^\circ\ W$$
$$(618')$$

$$\operatorname{tg} R = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi_c} = 1,533993596 \qquad R_V = N\ 56^\circ\ 54'\ 00''\ W$$

$$m = \Delta\varphi / \cos R = 600,98 \simeq 601 \text{ mg.}$$

$$\Delta t = \frac{601}{18} = 33^h 23^m 20^s = 1^d 09^h 23^m 20^s$$

$$\begin{array}{lll}
Tm = 16^h 18^m 56^s & \text{del } 21/04 \\
+\Delta t = 09^h 23^m 20^s & \quad 1^d \\
\hline
T'm = 25^h 42^m 16^s & \text{del } 22/04 \\
+\lambda = -9^h & \\
\hline
t_f = 16^h 42^m 16^s & \text{del } 22/04
\end{array}$$

Quesito B

$$\begin{array}{lll}
tm = 19^h\ 30^m\ 00^s & \text{del } 20/04/2013 \\
-\lambda = +\ 8^h\ 18^m\ 40^s & \\
\hline
Tm = 03^h\ 48^m\ 40^s & \text{del } 21/04
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
T'_a = 103^\circ\ 08',3 & \\
I'_a = 11^\circ\ 36',7 & \\
+pp = \quad 10,6 & \\
\hline
T_a = 114^\circ\ 55',6 & \\
+\lambda = -124^\circ\ 40',0 & \\
\hline
t_a = 350^\circ\ 15',6 & \\
P_E = 09^\circ\ 44',4 &
\end{array}$$

$v = 13,1$

$$\begin{array}{l}
\delta'_a = +06^\circ 20',0 \quad d = -10,6 \quad PAR = 56,4 \\
+pp = - \quad 8,6 \\
\hline
\delta_a = +06^\circ\ 11',4
\end{array}$$

$$\text{sen}\, h = \text{sen}\,\varphi\, \text{sen}\,\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos P =$$
$$= 0,830263975$$
$$h = 56^\circ\ 07',6$$

$$\begin{array}{l}
hi\odot = 56^\circ\ 01',5 \\
+\gamma_e = - \quad 1',5 \\
\hline
ho\odot = 56^\circ\ 00',0 \\
\qquad\qquad 12,5 \\
\qquad\qquad 51,2 \\
\qquad\qquad 4,4 \\
\hline
hv\odot = 56^\circ\ 08',1 \\
-h_s = -56^\circ\ 07',6 \\
\hline
\Delta h = + \quad 0,5'
\end{array}$$

$$\cot Z = \frac{\text{tg}\,\delta \cos\varphi - \text{sen}\,\varphi \cos P}{\text{sen}\, P} =$$
$$= -3,159430479$$

$$Z = N\ 162^\circ 26' 12'' E$$

Domando al compilatore:
perché il lembo superiore?

CARTEGGIO N° 3

In navigazione a SE dell'Isola Pianosa, un'imbarcazione diretta al porticciolo turistico di Marciana Marina con Vp=6 nodi, alle tf=10^h00^m nel punto φ=42°31',8N λ=10°12',2E accosta per passare a mg.2 a levante dell'isolotto La Scola. Nella zona agisce una corrente di azc=40° Vc=1,2 Kn; calcolare la Pb da seguire e la Veff.

tf=10^h00^m Rv=_____ Pb=_____ Veff.=_____

Alle tf=10^h36^m il segnale sull'isolotto La Scola si rileva al grafometro su ρ=-45° ed alle tf=10^h52^m risulta al traverso, cioè su ρ=-90°; segnare il punto nave

tf=10^h52^m Rilv=_____ d=_____ Pn: φ=_________ λ=_________

Alle tf=11^h04^m si rilevano, in rapida successione, il faro di Pianosa per Rilm=201° e l'isolotto La Scarpa per Rilm=269°; determinare il Pn.

tf=11^h04^m faro Pianosa Rilv=_____

I.La Scarpa Rilv=_____ Pn: φ=_______ λ=_______

Alla stessa ora un'imbarcazione B comunica di trovarsi nel punto di coordinate φ=42°34',7N λ=10°20'E alla deriva che chiede immediata assistenza che potrebbe tramutarsi in soccorso; determinare:

1) La rotta di intercettazione e la Pb da seguire

Rv=______ Pb=________

2) Le coordinate del punto d'intercettazione

Punto d'intercettazione φ=__________ λ=_________

3) L'ETA nel punto di intercettazione, da comunicare all'imbarcazione in difficoltà.

ETA tf=__________

NOTA

Per la declinazione considerare il valore : d = + 1°

Deviazioni residue - Bussola normale (dei rilevamenti)

P_b =	0°	δ =	+ 0°,2	P_b =	180°	δ =	+ 0°,5	P_m =	0°	δ =	+ 0°,3	P_m =	180°	δ =	+ 0°,4
»	15°	»	— 1°,1	»	195°	»	+ 1°,7	»	15°	»	— 1°,2	»	195°	»	+ 1°,6
»	30°	»	— 1°,8	»	210°	»	+ 2°,2	»	30°	»	— 1°,9	»	210°	»	+ 2°,2
»	45°	»	— 2°,5	»	225°	»	+ 2°,8	»	45°	»	— 2°,7	»	225°	»	+ 2°,7
»	60°	»	— 3°,0	»	240°	»	+ 3°,2	»	60°	»	— 3°,2	»	240°	»	+ 3°,2
»	75°	»	— 3°,8	»	255°	»	+ 3°,8	»	75°	»	— 3°,9	»	255°	»	+ 3°,6
»	90°	»	— 3°,9	»	270°	»	+ 4°,0	»	90°	»	— 3°,9	»	270°	»	+ 4°,0
»	105°	»	— 3°,8	»	285°	»	+ 3°,8	»	105°	»	— 3°,8	»	285°	»	+ 3°,9
»	120°	»	— 3°,4	»	300°	»	+ 3°,2	»	120°	»	— 3°,3	»	300°	»	+ 3°,4
»	135°	»	— 2°,8	»	315°	»	+ 2°,5	»	135°	»	— 2°,7	»	315°	»	+ 2°,7
»	150°	»	— 2°,0	»	330°	»	+ 1°,8	»	150°	»	— 1°,9	»	330°	»	+ 1°,9
»	165°	»	— 1°,0	»	345°	»	+ 1°,0	»	165°	»	— 0°,9	»	345°	»	+ 1°,1

Deviazioni residue - Bussola di rotta (del timoniere)

P_m =	0°	δ =	0°	P_m =	180°	δ =	— 0°,5
»	15°	»	+ 1°	»	195°	»	+ 0°,5
»	30°	»	+ 2°,5	»	210°	»	+ 2°
»	45°	»	+ 4°	»	225°	»	+ 3°,5
»	60°	»	+ 3°	»	240°	»	+ 2°
»	75°	»	+ 2°	»	255°	»	+ 1°
»	90°	»	+ 0°,5	»	270°	»	0
»	105°	»	0	»	285°	»	— 1°
»	120°	»	— 1°	»	300°	»	— 2°,5
»	135°	»	— 2°	»	315°	»	— 4°
»	150°	»	— 3°	»	330°	»	— 2°,5
»	165°	»	— 1°,5	»	345°	»	— 1°

Quesito C

1

$$C\omega' = \frac{155 \cdot 0{,}021}{0{,}025} = 130{,}2 \text{ mm} \; ; \; D'_i = \frac{19{,}05 \cdot 1{,}004}{1{,}025} = 18{,}66 \text{ tonn.}$$

$$\Delta i = \left(\frac{1830 + 1980}{2}\right) - 1850 + 130{,}2 = 185{,}2 \text{ mm} = 18{,}52 \text{ cm.}$$

$$P = 18{,}66 \cdot 18{,}52 = 345{,}58 \cong 345{,}6 \text{ tonn.}$$

Carico da imbarcare $= 345{,}6 + 35 = 380{,}6 \cong 381$ tonn.

2

Bunker necessario $= 5{,}75^{d} \cdot 30 - 47 = 125{,}5$ tonn.

3

$(KG \equiv z_G)$

$$z'_G = \frac{\Delta \cdot z_G + \sum_1^3 p \cdot z - \sum_1^2 p' \cdot z'}{\Delta + \Sigma p - \Sigma p'}$$

$$z'_G = \frac{40805}{7000} = 5{,}83 \text{ m.}$$

Quesito A

$t_f = 10^h 00^m$ $R_v = 324°$ $P_v = 313{,}0°$ $V_{eff.} = 6{,}2$ nodi

$$\begin{array}{r} P_v = 313{,}0° \\ -d = -\ 0{,}7° \\ \hline P_m = 312{,}3° \\ -\delta = -\ 2{,}0° \\ \hline P_b = 310{,}3° \end{array}$$

$t_f = 10^h 52^m$ $Rilv = 223°$ $d = 1{,}7$ mg P_n : $\varphi = 42°36',3\,N$ $\lambda = 10°07',9\,E$

$t_f = 11^h 04^m$ faro Pianosa $Rilv \doteq 202°$; La Scarpa $Rilv \doteq 270°$:

P_n : $\varphi = 42°37',3\,N$ $\lambda = 10°07',0\,E$

1

$R_v = 095°$ $V_{eff} = 6{,}6$ nodi

$$\begin{array}{r} P_v = 105{,}0° \\ -d = -\ 0{,}7° \\ \hline P_m = 104{,}3° \\ -\delta = +\ 1{,}7° \\ \hline P_b = 106{,}0° \end{array}$$

2

Punto d'intercettazione : $\varphi = 42°36',3\,N$ $\lambda = 10°21',8\,E$

3

L'ETA nel punto d'intercettazione : $t_f = 11^h 04^m + 1^h 40^m = 12^h 44^m$

4

Differenza psicrometrica $\Delta T = 1°$, $T_b = 19° \longrightarrow$ TAV. 14 :

$U_r = 91\%$ $T_d = 19°C$

Dispiace rilevare che in questa domanda non è dato il valore della pressione atmosferica al momento dell'osservazione allo psicrometro (quale tipo di strumento ?)

Richiesta - Collega

Quando si devono rappresentare zone della superficie terrestre comprese tra due paralleli molto vicini (differenza di latitudine $\Delta\varphi \leq 2°$), la scala delle latitudini della carta può ritenersi costante per tutta la zona da rappresentare.

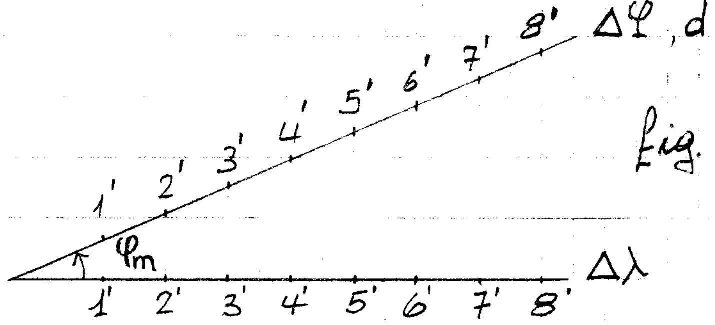


fig. 1

le scale grafiche, tuttora indicate nei libri di testo.

Dimostriamo che l'errore che si commette è trascurabile anche alle più alte latitudini. La relazione:

$$\Delta\varphi_c = \log tg\left(45° + \frac{\varphi_2}{2}\right) - \log tg\left(45° + \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

dà, in radianti, la distanza fra i due paralleli limiti della carta.

Essendo: $\varphi_2 = \varphi_m + \Delta\varphi/2$ e $\varphi_1 = \varphi_m - \Delta\varphi/2$

Possiamo scrivere:

$$\Delta\varphi_c = f(\varphi_2) - f(\varphi_1) = f\left(\varphi_m + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - f\left(\varphi_m - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Sviluppando in serie di Taylor con arresto alla derivata terza per l'esiguo valore di $\Delta\varphi$, si ricava:

$$\Delta\varphi_c = f(\varphi_m) + \frac{\Delta\varphi}{2} f'(\varphi_m) + \frac{(\Delta\varphi/2)^2}{2!} f''(\varphi_m) + \frac{(\Delta\varphi/2)^3}{3!} f'''(\varphi_m) - f(\varphi_m) + \frac{\Delta\varphi}{2} f'(\varphi_m) - \frac{(\Delta\varphi/2)^2}{2!} f''(\varphi_m) + \frac{(\Delta\varphi/2)^3}{3!} f'''(\varphi_m)$$

$$\Delta\varphi_c = 2\,\frac{\Delta\varphi}{2} f'(\varphi_m) + 2\,\frac{\Delta\varphi^3}{8 \cdot 6} f'''(\varphi_m) = \Delta\varphi\, f'(\varphi_m) + \frac{\Delta\varphi^3}{24} f'''(\varphi_m)$$

dove: $f(\varphi_m) = \log tag\left(45° + \frac{\varphi_m}{2}\right)$

Allora $f'(\varphi_m) = \sec \varphi_m$ e $f'''(\varphi_m) = \dfrac{1 + \operatorname{sen}^2 \varphi_m}{\cos^3 \varphi_m}$,

con la sostituzione nell'ultima espressione di $\Delta\varphi_c$, esprimendola in primi, si ottiene infine :

$$\Delta\varphi_c' = \Delta\varphi' \sec \varphi_m + \frac{\Delta\varphi^3}{24} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_m + 1}{\cos^3 \varphi_m} \operatorname{sen}^2 1'$$

Il primo termine del secondo membro è valutato sulla scala inclinata della fig. 1 , essendo $\Delta\varphi$ un arco di meridiano uguale anche ad un arco di equatore ; mentre il secondo termine esprime in primi l'errore :

$$E = \frac{\Delta\varphi^3}{24} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_m + 1}{\cos^3 \varphi_m} \operatorname{sen}^2 1'$$

Che si ha per tutta l'estensione della scala relativa alla differenza di latitudine $\Delta\varphi$ rappresentata.

L'errore E aumenta con il crescere del valore di φ_m .

Per $\varphi_m = 60°$ e $\Delta\varphi = 2° = 120'$

$$E = \frac{120^3}{24} \frac{\operatorname{sen}^2 60° + 1}{\cos^3 60°} \operatorname{sen}^2 1' = 0{,}08529 \simeq 0{,}1'$$

Per $\varphi_m = 72°$ e $\Delta\varphi = 2° = 120'$

$$E = \frac{120^3}{24} \frac{\operatorname{sen}^2 72° + 1}{\cos^3 72°} \operatorname{sen}^2 1' = 0{,}39 = 0{,}4$$

L'errore è quindi praticamente trascurabile